

Madde Tepki Kuramları – 2 Dersi

Çalışma Paketi – 4

Konu: Çok Kategorili Madde Tepki Kuramı Modelleri (Polytomous Item Response Theory)

Hedefler:

- Kısmi Puanlama Modeli (Partial Credit Model) kullanarak madde parametrelerini kestirme,
- Her bir cevap kategorisi için ayırt edicilik (discrimination) ve kategori eşik parametreleri (category threshold) hesaplama,
- Kategorik karakteristik eğrilerini (CCC: Category Characteristic Curve) çizdirme,

Gerekli Programlar: (1) R Studio

Bu çalışma paketinin ilk bölümü, R Studio programı ile çok kategorili puanlanan maddelere ait madde parametrelerinin kestiriminde Kısmi Puanlama Modelinin kullanımını içermektedir. Bu bölümde öncelikle R Studio programı ile analizin uygulama aşamaları (input, data, syntax, output) gösterilmiştir.

Bölüm 1 - Kısmi Puanlama Modeli (Partial Credit Model)

Madde Tepki Kuramı modelleri içinde yer alan çok kategorili puanlanan maddeler için geliştirilen modeller “fark modelleri (difference-model)” ve “toplama bölünen modeller (divide-by-total)” olarak iki grupta yer almaktadır (Ostini & Nering, 2006). Kısmi Puanlama Modeli (Masters, 1982), toplama bölünen modellerden biridir.

Kısmi Puanlama Modeli’nde, ikili puanlanan modellerde olduğu gibi iki kategorinin modellenmesine benzer olarak ardışık iki kategori arasında “dichotomization” varsayılarak modelleme yapılır. Bu durumda, i maddesi için her bir kategori eşik (k) parametresi için ayrı adım güçlüğü parametresi (b) kestirilir. Bu modelde tüm maddelerin ayırt ediciliğinin 1 olduğu varsayılmaktadır (Ostini & Nering, 2006).

Herhangi bir yetenek düzeyi (θ) koşulunda, belirli bir kategorinin cevaplanma olasılığı (P_{ik});

$$P_{ik}(\theta) = \frac{\exp \sum_{x=0}^k 1.7(\theta - bix)}{\sum_{j=0}^m \exp \sum_{x=0}^j 1.7(\theta - bix)}$$

Kısmi puanlama modeli ile parametre kestirimi sonucunda, her madde için eşit olan ayırt edicilik parametresi ve m kategorisi olan her bir madde için $m-1$ adım güçlüğü (kategori eşik parametresi) elde edilir. Kahraman (2014), her bir kategorinin cevaplanma olasılığının nasıl hesaplanacağını göstermiştir. m tane kategorisi olan bir madde için $m-1$ adım güçlüğü (kategori eşik) parametresi kestirilir. β_{im} , m ve $m-1$ kategorilerinin cevaplanma olasılığının eşit olduğu θ_j değerini ifade etmektedir. Bu durumda, 3 kategorili bir madde için, her bir kategorinin cevaplanma olasılığı aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır:

$$P(Y_{ji} = 0 | \theta_j, \beta_m) = \frac{1}{1 + \exp(\theta_j - \beta_i) + \exp(2\theta_j - \beta_{i1} - \beta_{i2})}$$

$$P(Y_{ji} = 1 | \theta_j, \beta_m) = \frac{\exp(\theta_j - \beta_{i1})}{1 + \exp(\theta_j - \beta_i) + \exp(2\theta_j - \beta_{i1} - \beta_{i2})}$$

$$P(Y_{ji} = 2 | \theta_j, \beta_m) = \frac{\exp(2\theta_j - \beta_{i1} - \beta_{i2})}{1 + \exp(\theta_j - \beta_i) + \exp(2\theta_j - \beta_{i1} - \beta_{i2})}$$

Analiz

Kısmi Puanlama Modeline göre yapılan madde parametreleri kestiriminde ayırt edicilik değerleri tüm maddeler için 1 olarak eşit varsayılmaktadır.

Analizin ilk aşamasında, kategorilerin (k=7) cevaplama olasılığının hesaplanabilmesi için her madde için kategori sayısı-1 (7-1=6) kadar kategori eşik parametresi (threshold) elde edilmiştir. Bir sonraki aşamada, elde edilen kategori eşik parametreleri ile her madde için her bir kategorinin cevaplanma olasılığı elde edilmiştir. Bu çalışma kapsamında, tüm maddeler için kategori eşik parametre kestirimleri gerçekleştirilmiş ancak örnek oluşturması için kategori cevaplama olasılıkları (7 kategori için) sadece 1. Madde üzerinden hesaplanmıştır.

Paketin Yüklenmesi

Parametre kestirimi için *mirt* paketini yükleyiniz.

```
install(mirt)
```

Verinin Okutulması

Analiz için “Hiç katılmıyorum (1)’den Kesinlikle katılıyorum (7)’e kadar olan 7’li dereceleme kategorilerine sahip Büyük Beş Kişilik ölçeği verisi kullanılmıştır. Bu aşamada **“big5.dat”** adlı veri dosyası kullanılacaktır.

```
#çalışma alanının ayarlanması
#stewd bölümünü kendi çalışma klasörünüz olarak ayarlayınız
setwd("C:/Users/PC/Desktop/Çalışma Paketi-3")

pcmm.data<- read.delim("big5.dat", header = TRUE) #verinin programa okutulması

pcm.data <- pcmm.data[,-(1:3)] #1'den 3'e kadar olan sütunların silinmesi

str(pcm.data) #analiz için veri yapısı
```

Madde Parametre Kestirimi

Kategori eşik (adım güçlüğü) parametrelerinin kestirimi için `model.pcm` fonksiyonu kullanılmıştır. Bu fonksiyon ile her madde için kategori sayısı-1 (=6) tane kategori eşik parametresi ve tüm maddeler için 1 e sabitlenmiş madde ayırt edicilik parametreleri kestirimi elde edilecektir. `itemtype="Rasch"` komutu, tüm maddelerin ayırt edicilik parametresinin 1 olarak kestirimini sağlayacaktır.

```
#paketi çalıştırınız
library(mirt)
```

```
#madde parametrelerinin kestirimi
```

```
model.pcm <- 'personalitytype = 1-30'  
results.pcm <- mirt(data=pcm.data, model=model.pcm, itemtype="Rasch", SE=TRUE, verbose=FALSE)  
coef.pcm <- coef(results.pcm, IRTpars=TRUE, simplify=TRUE)  
items.pcm <- as.data.frame(coef.pcm$items)  
round(data.frame(items.pcm),3)
```

```
#ayırt edicilik ve kategori eşik parametrelerinin yazdırılması
```

```
write.table(round(data.frame(items.pcm),3),  
            "C:\\Users\\PC\\Desktop\\Çalışma Paketi-3\\pcm par.dat")
```

```
> round(data.frame(items.pcm),3)
```

	a	b1	b2	b3	b4	b5	b6
I1CNYKN	1	-0.477	-0.839	-0.329	-1.347	-0.650	0.738
I2YRDMSVR	1	-0.298	-0.240	-1.683	-1.961	-1.223	0.465
I3NAZIK	1	-1.193	-0.806	-1.005	-1.283	-1.031	0.902
I4BRLKTC	1	-1.090	-0.568	-0.021	-0.929	-0.024	1.067
I5UYMLU	1	-1.525	-0.908	-0.694	-1.057	-1.039	0.670
I6ANLYSL	1	-0.279	-0.444	-1.324	-1.718	-0.814	0.733
I7_MESFL	1	-0.731	-0.428	0.524	0.656	0.187	1.640
I8_SESSIZ	1	-0.653	-0.261	-0.034	0.595	-0.371	1.011
I9_ICEDNK	1	-0.370	-0.424	0.095	0.409	-0.496	1.206
I10KNSKN	1	-1.636	-0.256	-0.836	-0.434	0.188	0.547
I11_UTNGC	1	-1.221	-0.445	0.247	0.248	0.063	1.509
I12_CKNGN	1	-1.293	-0.220	0.028	0.254	-0.149	1.082
I13_DGNK	1	-0.482	-0.367	0.278	0.412	-0.891	0.556
I14DIKCTL	1	-1.784	-0.267	-1.455	-0.270	-0.095	1.314
I15TERPL	1	-1.370	0.181	-0.921	-0.501	-0.125	0.857
I16DAKIK	1	-1.168	-0.393	0.002	-0.738	-0.430	0.404
I17DUZNL	1	-1.137	-0.556	-0.183	-0.886	-0.185	0.790
I18SISTML	1	-1.141	-0.646	-0.250	-0.641	0.066	0.999
I19_HIRCN	1	-0.838	-0.663	0.401	0.152	-0.244	0.897
I20_GERGN	1	-1.415	-0.455	0.405	0.156	0.076	1.247
I21_ALNGN	1	-0.645	-0.818	0.409	0.319	-0.140	1.345
I22_KAYGL	1	-1.061	-0.182	0.515	0.257	0.144	1.783
I23_URKEK	1	-1.272	-0.671	-0.226	0.211	-0.922	1.271
I24_ENDSL	1	-1.601	-0.469	0.407	0.191	-0.003	1.768
I25HAYLGUCU	1	-1.271	-0.724	-0.955	-0.474	-0.248	0.268
I26MERKL	1	-1.125	-1.051	-0.961	-0.515	0.637	NA
I27BILGL	1	-2.099	-0.310	-2.011	-0.199	0.137	1.812
I28YNLKC	1	-1.346	-1.037	-0.845	-0.936	-0.399	1.373
I29SNTCRUHL	1	-0.859	-0.270	-0.719	-0.148	0.181	0.676
I30YARTCI	1	-0.362	-0.919	-0.810	-0.467	-0.042	0.991

items.pcm çıktısına bakıldığında, satırlarda maddeler ve sütunlarda kestirilen madde parametreleri görülmektedir. *a*, ayırt edicilik parametresi 1 olarak tüm maddeler için eşit elde edilmiştir. *b* parametreleri her bir madde için sırasıyla 6 kategori eşik parametresi olarak kestirilmiştir. Elde edilen kategori eşik parametreleri bir sonraki analiz için girdi dosyasını oluşturacaktır.

```
pcm.par<- read.delim("pcm par.dat", header = TRUE) #kestirilen parametrelerin girdi olarak okutulması
```

```
str(pcm.par)
```

```
#ilk 2 sütunun çıkarılmış ve sadece 30 maddeye ait kategori eşik parametreleri bırakılmıştır.
```

```
pcmm.par <- pcm.par[-(1:2)]
```

```
# Bu aşamada pcmm.par matris formatında tanımlanmıştır.
```

```
M<-matrix(c(rep(0,30*6)),30,6) #pcmm.par dosyasında yer alan parametrelerin yerleştirileceği boş matris
M[,1]<- pcmm.par[,1]
M[,2]<- pcmm.par[,2]
M[,3]<- pcmm.par[,3]
M[,4]<- pcmm.par[,4]
M[,5]<- pcmm.par[,5]
M[,6]<- pcmm.par[,6]

str(M)
```

Bu aşamadan sonra 1. maddeye ait kategori cevaplama olasılıkları adım adım hesaplanacaktır. Analiz sonucunda, 1.madde için farklı yetenek (theta) düzeylerinde 7 kategoriye cevap verme olasılıkları elde edilecektir. P_{ik} hesaplaması için işlem adımları şu şekilde tanımlanmıştır:

$$P_{ik}(\theta) = \frac{\exp\left(\sum_{x=0}^k 1.7(\theta - bix)\right)}{\sum_{j=0}^{mi} \exp\left(\sum_{x=0}^j 1.7(\theta - bix)\right)}$$

$d=1.7$

$$L_k = d * (\theta - b_{ix})$$

$$opL_k = \exp\left(\sum_{x=0}^k L_k\right)$$

$$P_{ik} = opL_k / \sum_{j=0}^{mi} opL_k$$

```
# pcm1 boş matrisi, madde 1 için hesaplanacak kategori olasılıklarının yerleştirileceği matris olarak oluşturulmuştur.
```

```
pcm1<-matrix(c(rep(0,101*8)),101,8)
```

```
d <- 1.7 # sabit parametre
```

```
theta <- seq(-4, 4, length=101) # theta yetenek düzeyi -4 ve +4 aralığında 101 aralık olarak tanımlanmıştır
```

```
pcm1[,1] <- theta #theta noktaları pcm1 matrisinde 1.sütun olarak tanımlanmıştır.
```

```
> theta <- seq(-4, 4, length=101)
> theta
[1] -4.00 -3.92 -3.84 -3.76 -3.68 -3.60 -3.52 -3.44 -3.36
[10] -3.28 -3.20 -3.12 -3.04 -2.96 -2.88 -2.80 -2.72 -2.64
[19] -2.56 -2.48 -2.40 -2.32 -2.24 -2.16 -2.08 -2.00 -1.92
[28] -1.84 -1.76 -1.68 -1.60 -1.52 -1.44 -1.36 -1.28 -1.20
[37] -1.12 -1.04 -0.96 -0.88 -0.80 -0.72 -0.64 -0.56 -0.48
[46] -0.40 -0.32 -0.24 -0.16 -0.08 0.00 0.08 0.16 0.24
[55] 0.32 0.40 0.48 0.56 0.64 0.72 0.80 0.88 0.96
[64] 1.04 1.12 1.20 1.28 1.36 1.44 1.52 1.60 1.68
[73] 1.76 1.84 1.92 2.00 2.08 2.16 2.24 2.32 2.40
[82] 2.48 2.56 2.64 2.72 2.80 2.88 2.96 3.04 3.12
[91] 3.20 3.28 3.36 3.44 3.52 3.60 3.68 3.76 3.84
[100] 3.92 4.00
```

Bu aşamada, bir önceki aşamada kestirilen ve M matrisinde tanımlanan kategori eşik parametreleri kullanılarak kategori cevaplama olasılıkları hesaplanacaktır. M matrisindeki ilk satır 1.maddeye ait kategori eşik parametrelerini göstermektedir. Verilen bir theta düzeyinde 1. madde için 1. kategorinin cevaplanma olasılığı;

```
#b0

#1.kategorinin kendinden önce başka bir kategorisi olmadığından b parametresi 0 olarak tanımlanmaktadır.
b.par0 <- 0

L0 <- d*(theta - b.par0)

opL0 <- exp(L0)

#1.kategorinin cevaplanma olasılığı
P10 <- opL0 / (exp(L0) + exp(L0+L1)+ exp(L0+L1+L2) + exp(L0+L1+L2+L3)+
              exp(L0+L1+L2+L3+L4) +exp(L0+L1+L2+L3+L4+L5)+
              exp(L0+L1+L2+L3+L4+L5+L6))

# 1.kategorinin cevaplanma olasılığı pcm1 matrisinde 2.sütun olarak tanımlanmıştır.
pcm1[,2] <- round(P10,3)
```

```
> round(P10,3)
 [1] 0.997 0.997 0.997 0.996 0.996 0.995 0.994 0.993 0.993 0.991 0.990 0.989 0.987
 [14] 0.985 0.983 0.980 0.978 0.974 0.970 0.966 0.961 0.955 0.948 0.940 0.931 0.921
 [27] 0.908 0.894 0.877 0.858 0.835 0.809 0.777 0.740 0.696 0.644 0.583 0.513 0.434
 [40] 0.350 0.266 0.190 0.127 0.080 0.048 0.028 0.015 0.008 0.004 0.002 0.001 0.001
 [53] 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000
 [66] 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000
 [79] 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000
 [92] 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000
```

1.maddenin 1.kategorisinin 101 farklı yetenek (theta) noktasında cevaplanma olasılıkları yukarıdaki gibi hesaplanmıştır.1.maddeye ait diğer kategoriler için cevaplanma olasılıkları aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

```
#b1

b.par1 <- M[1,1]
L1 <- d*(theta - b.par1)
opL1 <- exp(L1 + L0)

#2.kategorinin cevaplanma olasılığı
P11 <- opL1/ (exp(L0) + exp(L0+L1)+ exp(L0+L1+L2) +
              exp(L0+L1+L2+L3)+ exp(L0+L1+L2+L3+L4) +
              exp(L0+L1+L2+L3+L4+L5)+exp(L0+L1+L2+L3+L4+L5+L6))
pcm1[,3] <- round(P11,3)

# b2

b.par2 <- M[1,2]
L2 <- d*(theta - b.par2)
opL2 <- exp(L2 +L1+ L0)
P12 <- opL2/ (exp(L0) + exp(L0+L1)+ exp(L0+L1+L2) +
              exp(L0+L1+L2+L3)+ exp(L0+L1+L2+L3+L4) +
              exp(L0+L1+L2+L3+L4+L5)+exp(L0+L1+L2+L3+L4+L5+L6))
pcm1[,4] <- round(P12,3)
```

```

# b3
b.par3 <- M[1,3]
L3 <- d*(theta - b.par3)
opL3 <- exp(L3+ L2 +L1+ L0)
P13 <- opL3/ (exp(L0) + exp(L0+L1)+ exp(L0+L1+L2) +
             exp(L0+L1+L2+L3)+exp(L0+L1+L2+L3+L4)+
             exp(L0+L1+L2+L3+L4+L5)+exp(L0+L1+L2+L3+L4+L5+L6))
pcm1[,5] <- round(P13,3)

# b4
b.par4 <- M[1,4]
L4 <- d*(theta - b.par4)
opL4 <- exp(L4 + L3 + L2 + L1+ L0)
P14 <- opL4/ (exp(L0) + exp(L0+L1)+ exp(L0+L1+L2) +
             exp(L0+L1+L2+L3)+ exp(L0+L1+L2+L3+L4) +
             exp(L0+L1+L2+L3+L4+L5)+exp(L0+L1+L2+L3+L4+L5+L6))
pcm1[,6] <- round(P14,3)

# b5
b.par5 <- M[1,5]
L5 <- d*(theta - b.par5)
opL5 <- exp(L5 + L4 + L3 + L2 + L1+ L0)
P15 <- opL5/ (exp(L0) + exp(L0+L1)+ exp(L0+L1+L2) +
             exp(L0+L1+L2+L3)+ exp(L0+L1+L2+L3+L4) +
             exp(L0+L1+L2+L3+L4+L5)+exp(L0+L1+L2+L3+L4+L5+L6))
pcm1[,7] <- round(P15,3)

# b6
b.par6 <- M[1,6]
L6 <- d*(theta - b.par6)
opL6 <- exp(L6+ L5 + L4 + L3 + L2 + L1+ L0)
P16 <- opL6/ (exp(L0) + exp(L0+L1)+ exp(L0+L1+L2) +
             exp(L0+L1+L2+L3)+ exp(L0+L1+L2+L3+L4) +
             exp(L0+L1+L2+L3+L4+L5)+exp(L0+L1+L2+L3+L4+L5+L6))
pcm1[,8] <- round(P16,3)

```

pcm1 matrisinde yer alan birinci sütun theta düzeylerini (101theta noktası), 2-8 arasındaki sütunlar da madde 1 için 7 kategorinin farklı theta koşullarında cevaplanma olasılıklarını göstermektedir.

```

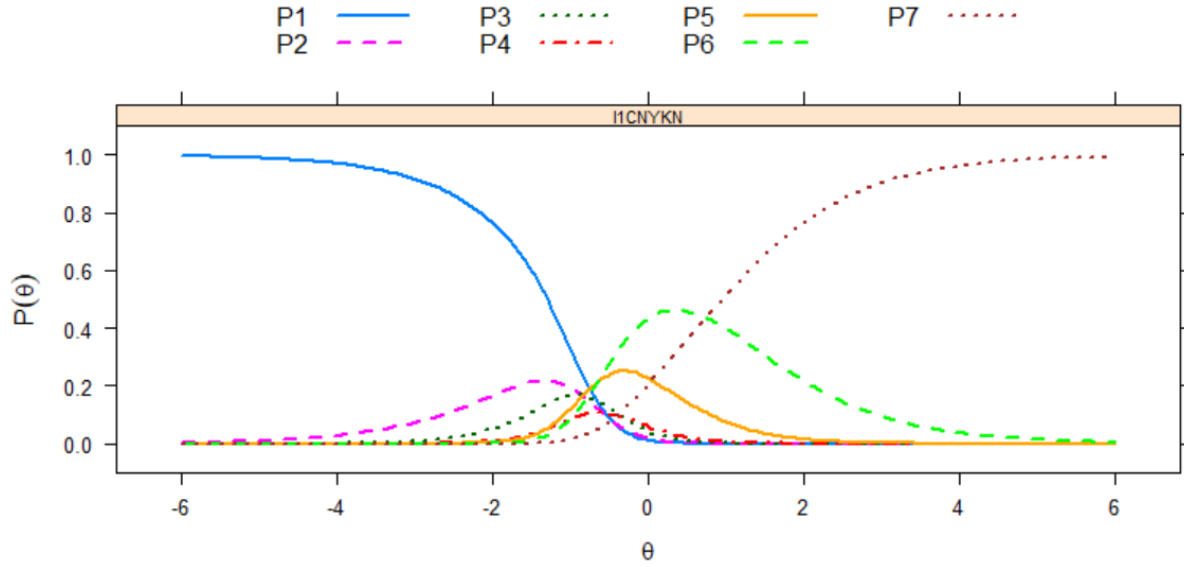
> pcm1
  [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8]
[1,] -4.00 0.997 0.002 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000
[2,] -3.92 0.997 0.003 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000
[3,] -3.84 0.997 0.003 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000
[4,] -3.76 0.996 0.004 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000
[5,] -3.68 0.996 0.004 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000
[6,] -3.60 0.995 0.005 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000
[7,] -3.52 0.994 0.006 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000
[8,] -3.44 0.993 0.006 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000
[9,] -3.36 0.993 0.007 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000
[10,] -3.28 0.991 0.008 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000
[11,] -3.20 0.990 0.010 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000
[12,] -3.12 0.989 0.011 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000
[13,] -3.04 0.987 0.013 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000
[14,] -2.96 0.985 0.014 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000
[15,] -2.88 0.983 0.017 0.001 0.000 0.000 0.000 0.000
[16,] -2.80 0.980 0.019 0.001 0.000 0.000 0.000 0.000
[17,] -2.72 0.978 0.022 0.001 0.000 0.000 0.000 0.000
[18,] -2.64 0.974 0.025 0.001 0.000 0.000 0.000 0.000
[19,] -2.56 0.970 0.028 0.002 0.000 0.000 0.000 0.000
[20,] -2.48 0.966 0.032 0.002 0.000 0.000 0.000 0.000
[21,] -2.40 0.961 0.037 0.003 0.000 0.000 0.000 0.000
[22,] -2.32 0.955 0.042 0.003 0.000 0.000 0.000 0.000

```

Kategori Karakteristik Eğrisi

Madde 1 için elde edilen kategori cevaplama olasılıkları kullanılarak “Kategori Karakteristik Eğrisi” oluşturulacaktır. Öncelikle *mirt* paketi kullanarak otomatik olarak 1.madde için kategori karakteristik eğrisi çizilmiştir. Sonrasında

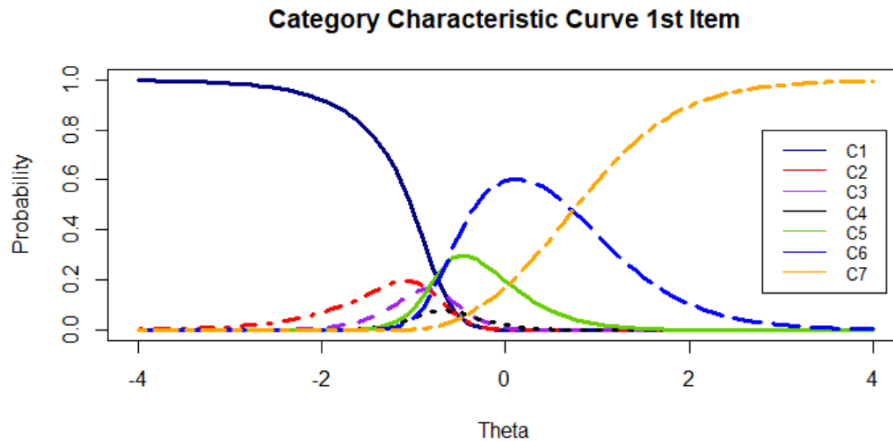
```
plot(results.pcm, type = 'trace', which.items = c(1), main = "", par.settings = simpleTheme(lty=1:4,lwd=2), auto.key=list(points=FALSE,lines=TRUE, columns=4))
```



Sonrasında her bir kategori için elde edilen kategori cevaplama olasılıkları kullanılarak kategori karakteristik eğrisi oluşturulmuştur.

```
plot(c(-4,4), c(0,1), xlab="Theta", ylab="Probability", type="n", main = "Category Characteristic Curve 1st Item")
```

```
lines(theta, P10, type = "l", pch = 1, lty = 1, col="navyblue", lw=3)
lines(theta, P11, type = "l", pch = 1, lty = 4, col="red", lw=3)
lines(theta, P12, type = "l", pch = 1, lty = 2, col="purple", lw=3)
lines(theta, P13, type = "l", pch = 1, lty = 3, col="black", lw=3)
lines(theta, P14, type = "l", pch = 1, lty = 1, col="chartreuse3", lw=3)
lines(theta, P15, type = "l", pch = 1, lty = 5, col="blue", lw=3)
lines(theta, P16, type = "l", pch = 1, lty = 1, col="orange", lw=3)
legend(2.8,0.8, c("C1", "C2", "C3", "C4", "C5", "C6", "C7"),
      col=c("navyblue", "red", "purple", "black", "chartreuse3", "blue", "orange"), lw=1, cex = 0.8)
```



Kaynakça

Kahraman, N. (2014). An explanatory item response theory approach for a computer based case simulation test, *Eurasian Journal of Educational Research*, 54, 117-134.

Masters, G. (1982). A Rasch model for partial credit scoring. *Psychometrika*, 47, 149–174.

Ostini, R. & Nering, M. L. (2006). *Polytomous Item Response Theory Models*. Thousand Oaks: Sage.